

对 $k-\omega$ 湍流模型的改进*

西北工业大学 沈慧俐**
加洲大学 郑小清 刘 锋

【摘要】 为了更适合于较复杂几何外形的数值计算,本文提出仅引入 1 个参数来改进 $k-\omega$ 湍流模型并采用了一种双网格系统的有限体积格式来求解 N-S 方程与改进的 $k-\omega$ 模型方程。通过平板附面层的计算结果表明了用本文提出的对 $k-\omega$ 湍流模型的改进对控制转捩是有效的。

主题词: 湍流流动 转捩点 附面层 数学模型
分类号: V211.3

1 引 言

用 N-S 方程求解气动问题的数值计算经验证明,计算结果的好坏很大程度上取决于湍流模型。早期的计算较多的使用代数方程模型,例如 Baldwin-Lomax 模型。笔者曾应用这种模型取得了较好的计算结果^[1]。双方程模型由于更多地反映了湍流的物理本质,目前在国内外获得了广泛的使用。1988 年 Wilcox D.C 提出了 $k-\omega$ 双方程模型,作为对 $k-\epsilon$ 双方程模型的一种改进。这种模型的主要优点是有比较清晰的数学表达形式,它不需要在壁面附近附加阻尼项,也不需要定义离壁面的法向距离。这对于较复杂的几何边界特别有利。与 $k-\epsilon$ 模型相比,它改进了逆压梯度与分离流动的计算。用 Wilcox 的 $k-\omega$ 模型虽然可以自动模拟层流向紊流的转捩,但得到的由层流到紊流的转捩点较实验值为低。为此,1991 年 Wilcox 提出了对 $k-\omega$ 湍流模型的改进,但这要另外引入 5 个参数,使模型变得太复杂,计算起来十分不便。本文根据对流动中物理现象的分析,提出了对 $k-\omega$ 紊流模型的一种改进方法,引入只包括 1 个参数的不等式来改进转捩点的计算。通过对平板流动的算例,表明了这种改进十分有效。

2 对 $k-\omega$ 模型的改进

用 Wilcox^[2] 提出的 $k-\omega$ 湍流模型计算可以自动得出由层流到紊流的转捩。但转捩点的当地雷诺数低于实验值。Wilcox 建议通过修正 ω 方程中的粘性来改进转捩点的计算。但这需要引入另外 5 个封闭参数,使模型变得太复杂^[3]。考虑到分离发生于当湍流混合能量 k 的发生超过了它的耗散,而湍流混合能量是由湍流应力产生。因此,可以认为在计算中湍流应力在转捩区的计算值过大是造成提前转捩的主要原因。延迟转捩应该可以通过适当限制湍流应力值或修正耗散率 ω 以限制湍流应力的增长来达到。具体方法如下: 根据定义 $k = 1/2(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$, 其中 u_1', u_2' 和 u_3' 分别为速度分量的脉动值, 及

1996 年 12 月收稿; 1997 年 2 月收到修改稿。 * 本文系国家自然科学基金资助项目, 编号: 19372052

** 西安市西北工业大学 703 教研室 710072

$$\frac{1}{\rho} \sum \overline{\tau_{i,j}^2} = \overline{u^2} + \overline{u^2} + \overline{u^2} + 2(\overline{u^1 u^2} + \overline{u^2 u^3} + \overline{u^1 u^3})$$

由于 $\overline{u^1 v} \leq \overline{u^1} \overline{v^1}$, 可得

$$\sum \overline{\tau_{i,j}^2} \leq 2\rho k \quad (1)$$

或

$$\{2\mu_i[S_{i,j} - (1/3)(\partial u_k / \partial x_k) \delta_{i,j}] - (2/3)\rho k \delta_{i,j}\}^2 \leq 2\rho k \quad (2)$$

利用 $\mu_T = \epsilon^* (\rho k / \omega)$, 并考虑到 $S_{i,j} \delta_{i,j} - (1/3)(\partial u_k / \partial x_k) \delta_{i,j} \delta_{i,j} = \partial u_i / \partial x_i - \partial u_k / \partial x_k = 0$ 。以及 $[(2/3)\rho k \delta_{i,j}]^2 = (4/3)(\rho k)^2$, 可得:

$$2\left[\epsilon^* \frac{\rho k}{\omega}\right] \left[S_{i,j} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{i,j}\right]^2 \leq \frac{2}{3}(\rho k) \quad (3)$$

$$\text{或} \quad \omega \geq \frac{3}{2} \epsilon^* \left[2\left(S_{i,j} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{i,j}\right)^2\right], \quad \omega \geq \frac{3}{2} \epsilon^* \left[2\left(S_{i,j} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{i,j}\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \quad (4)$$

将(4)式中的后一式改写为 $\omega \geq \alpha \epsilon^* P_{rod}$ (5)

此处 α 应等于 $\sqrt{3}/2$, 但这完全是由数学关系式推导得出。根据总的湍流应力应该受到某种限制猜想, 通过计算, 发现在(5)中若改变 α 的值会影响转捩点的估计, 但不会影响充分发展湍流区域的解。当取 $\alpha \leq 1$ 时, (5) 式不起作用, 但当 $\alpha > 1$ 时, 随着 α 的增大, 转捩点的位置后移。

(4) 式中的后一式右端根式内的项^[2]在(5)式中简记为 P_{rod} , 它是湍流产生项中的主项。在计算湍流混合能量方程和耗散率比方程中的 $\tau_{i,j}(\partial u_i / \partial x_j)$ 时包括有这一项的计算。

(5) 式是用来限制耗散率比 ω 值的公式。计算时, 取 $\omega = \max(\omega, \alpha \epsilon^* P_{rod})$ 。其中 ω 由 Wilcox 原来的 $k-\omega$ 模型计算。由于给出了 ω 的下限值, 避免了在自由剪切流中的 ω 值过小。

3 数值方法

用有限体积法求解。将积分形式的控制方程应用于每一个有限体积, 流量参数在控制体中心定义, 如图 1 中的圆圈所示。当联合求解 $N-S$ 方程与 $k-\omega$ 模型方程时, 常用的中心差分格式会引起不稳定。由于 $N-S$ 方程与模型方程的主要匹配项为应力与应变张量的乘积项, 而在 $N-S$ 方程中得到的体积边界上的 $\tau_{i,j}$ 与湍流模型中的 $\tau_{i,j}$ 不完全对应在同一位置。这一结果造成湍流动能 k 值不断增大, 最后导致计算失效。为此, 采用一种交错格式, 使应力及应变张量在同一位置计算。如图 1 所示, 变量 $\rho, \rho u_i$ 及 ρE 定义于有限体积中心, 而 $k, \omega, \partial u_i / \partial x_i$ 及 $\partial u_i / \partial x_j$ 定义于体积角点。在 $N-S$ 方程的计算中应用有限体积 Ω 而在 $k-\omega$ 方程计算时则应用与之交错的由中心点及交界面中点构成的辅助控制体 Ω' 。

扩散项中的应变与温度梯度通过对辅助控制体的高斯积分进行计算

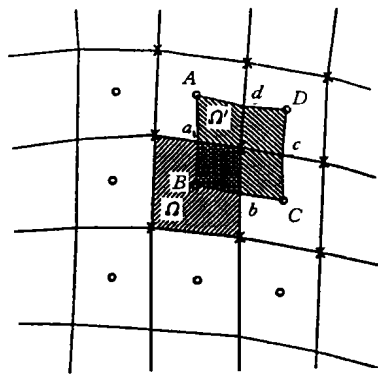


图 1 交错网格

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \approx \frac{1}{\Omega} \int_{BCDA} u_i dS_{sj} \quad (6)$$

其中 Ω 为辅助控制体面积或体积(三维情况), dS_{x_j} 为控制体面积矢量的 x_j 分量, u_i 在 Ω 的中心点也就是 Ω 的角点定义。因此, 由(6)式得到的偏导数采用了体积角点的有限体积格式。一旦体积 Ω 角点上的应力值已知, 则 $N-S$ 方程中的扩散通量可以方便的通过体积表面的角点格式求出。于是, 可以认为在 $N-S$ 方程的计算中使用了两种格式: 对非粘性项用中心格式而对粘性项则使用角点格式。因为在 $k-\omega$ 方程中, 粘性应力是源项, 因此将 k, ω 定义在体积 Ω 的角点, 与粘性力及乘积项在同一位置定义。

在 $k-\omega$ 方程中, 对流项用三阶迎风格式离散, 其扩散项的计算大致通过两个步骤, 首先, 计算 A、B、C、D 点的 k 与 ω 的梯度, 然后沿辅助体积 Ω 边界积分。

经过这样离散后, 控制方程变为一组含时间变量的常微分方程, 它可以用多步 *Runge-Kutta* 法求解。

4 算例及讨论

为了验证本文所提出的对 $k-\omega$ 湍流模型的改进的效果, 计算了一个平板湍流问题。计算自平板前缘前方某处的自由流开始, 一直计算到平板尾缘后的下游某处。计算时取自由流参数为 $M_\infty = 0.2$, $Re = 1 \times 10^7$, $\alpha = 0^\circ$ 。计算沿流向共采用 150 个有限体积, 其中平板前缘为 24 个, 平板上 120 个, 平板后 6 个。沿平板侧向取有限体积 39 个。从壁面起, 第一个体积的中心大致位于 $y^+ = 0.5 \sim 2$ 。

计算所得的壁面摩擦系数与当地雷诺数的关系曲线示于图 2 与图 3(图 2、3 中, — *Prandtl* 1/5 次紊流规律, - - - *Blasius* 层流规律; 图 2 中, $\circ$ *Wilcox* $k-\omega$ 模型(1988), $\triangle$ $k-\omega$ 模型 $\alpha = 1$, $\square$ $k-\omega$ 模型 $\alpha = 2$, $\diamond$ $k-\omega$ 模型 $\alpha = 3$ 。图 3 中, $\triangle$ *Wilcox* $k-\omega$ 模型(1993))。

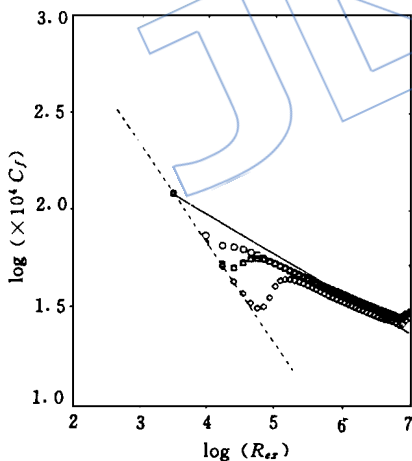


图 2 壁面摩擦系数比较($Re = 1.0E7$)

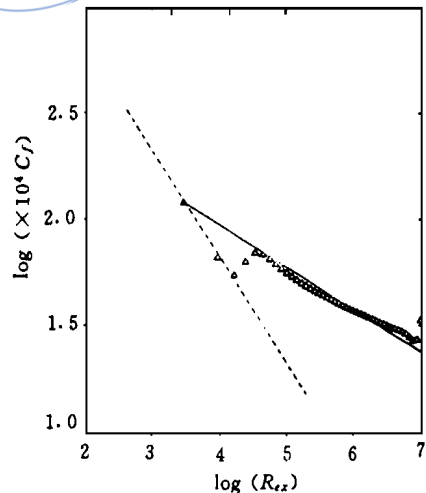


图 3 壁面摩擦系数比较($Re = 1.0E7$)

图 2 表示了用 *Wilcox* 的 $k-\omega$ 模型(1988)所得的计算结果。得到的转捩点的当地雷诺数值要比实验得到的值小得多。为了进行比较, 图上同时给出了使用了本文所提出的修正方法后的计算结果。可以看出, 在 $\alpha > 1$ (有修正) 的情况, 转捩在较大的当地雷诺数下发生。特别当 $\alpha = 3$ 时, 改进是十分明显的。1993 年 *Wilcox* 提出了改进的 $k-\omega$ 模型。为了进行比较, 用这个模型所做的计算结果表示在图 3。它大致相当于本文提出的改进方法中 $\alpha = 2$ 的计算结果。

通过以上的比较,可以得出以下初步结论:(1) 所提出的用一个参数 α 来修正 *Wilcox* 的 $k-\omega$ 湍流模型的方法对推迟转捩点的发生是十分有效的。计算经验表明,当 $\alpha \leq 1$ 时,应用公式(5)对计算结果影响不大,当 $\alpha > 1$ 时,随着 α 的增大,转捩点逐渐推迟。(2) 由于(5)式的右端项在计算湍流混合能量方程和耗散率比方程的乘积项时已进行了计算。所以增加(5)式并不增加计算的工作量。(3) 与 *Wilcox* 1993 年提出的改进后的模型相比较,用本文所提出的改进方法所得的计算结果其转捩发生在较宽的范围。进一步加密网格可以改进这一点。(4) 本文所用的改进方法可以完全类似地应用到 $k-\epsilon$ 模型上。图 4(图中, $\triangle$ *Lauder & Sharma* $k-\epsilon$ 模型(1972), $\square$ $k-\epsilon$ 模型 $\alpha=2$, $\diamond$ $k-\epsilon$ 模型 $\alpha=4$, — *Prandtl* 1/5 次紊流规律, - - - *Blasius* 层流规律)表示了对 $k-\epsilon$ 模型用本文的方法进行修正以及未进行修正的计算结果。

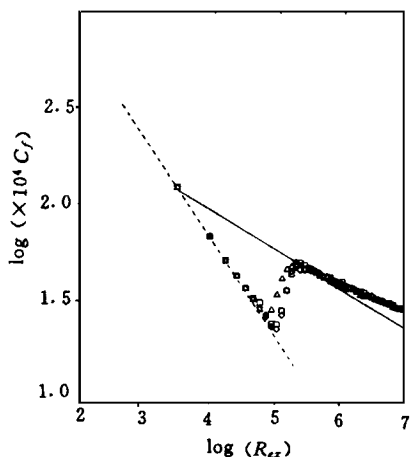


图 4 壁面摩擦系数比较($Re=1.7E$)

参 考 文 献

- 1 Shen H, et al. Sweep Finite Element Solution of Navier-Stokes Equations for Internal/External Flow of Nozzles. 11th ISABE, Tokyo, Japan, 1993
- 2 Wilcox D C. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. AIAA Journal, 1988, 26 (11): 1299-1310
- 3 Wilcox D C. A Half Century Historical Review of the $k-\omega$ Model. AIAA 1991: 91-0615
- 4 Liu F, Zheng X. A Staggered Finite Volume Scheme for Solving Cascade Flow with a Two-Equation Model of Turbulence. AIAA, 1993: 93-1912
- 5 Favre A. Equations des Gaz Turbulents Compressibles. Journal de Mecanique, 1965, 4(3): 361-390
- 6 Roe P L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. Journal of Computational Physics, 1981, 43(3): 357-372
- 7 Anderson W K, Thomas J L, Von Leer B. A Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. AIAA 1985, 85-0122
- 8 Liu F, Jameson A. Multigrid Navier-Stokes Calculations for Three-Dimensional Cascades. AIAA Journal, 1993, 31 (10): 1785-1791

(责任编辑 魏星禄)

algorithm for the full Navier–Stokes solver in generalized curvilinear coordinates is applied to calculate the viscous flow in the IPS. At last, the particle trajectories in the above viscous flowfield and separator efficiency are obtained. Good agreement between the experimental data and predicted results indicates that the presented procedure and its program contribute to development and design of future high performance inlet particle separator.

Key Words Flow fields Separators Numerical Simulation

AN IMPROVEMENT OF $k-\omega$ TURBULENT MODEL

Shen Huili

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Zheng Xiaoqing and Liu Feng

(University of California U. S. A.)

ABSTRACT

The $k-\omega$ turbulence model for predicting turbulence transition at a local Reynolds number lower than that observed in experiments. Wilcox suggested an approach to predict transition through modifying the viscosity in the ω equation with five more closure coefficients, but the approach made the model too complicated. Here we introduce only one simple parameter to improve the model. An inequality is proposed to set a lower limit for the specific dissipation. In order to make the Navier–Stokes equations and $k-\omega$ equations strongly coupled, a staggered finite volume scheme for discretizing the N–S equations and the $k-\omega$ model equations has been developed. The algorithm was tested for a flat plate flow. Computational results show that the present improvement of the $k-\omega$ turbulence model to control the transition position is effective.

Key Words Turbulent flows Mathematical models Transition points Boundary layer

NUMERICAL SIMULATION OF NORMAL SHOCK WAVE/TURBULENT BOUNDARY LAYER INTERACTION WITH PASSIVE CAVITY

Liang Dewang

(2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

R. Bohning

(University of Karlsruhe Germany)

ABSTRACT

A full Navier–Stokes procedure, coupling with a Baldwin/Lomax turbulence model, is used to study the normal shock wave/turbulent boundary layer interaction with passive cavity. In addition, the ventilation velocity profile on the porous plate is calculated by an empirical model formulated from experiments. The total pressure and total temperature boundary conditions for inflow are given due to the existence of sonic section in the channel flow and the static pressure boundary condition for outflow is given as well. The comparison between numerical and experimental results shows that the presented procedure can predict the shape of the shock, the Mach number in front of the shock, the pressure ratio on the wall and position of the shock quite well.

Key Words Turbulent boundary layer Shock wave interference Control problems